

2.5 Перебор возможных вариантов.

Решение комбинаторных задач

Комбинаторика (от латинского слова *combinare*, означающего «соединять», «сочетать») — это область математики, которая изучает способы выбора, расположения, сочетания различных объектов.

При решении комбинаторных задач чаще всего приходится отвечать на вопрос: «Сколькими способами...?» Например: сколькими способами можно выбрать двух участников олимпиады по математике из пяти учеников? Сколькими способами можно организовать туристический маршрут, предусматривающий посещение четырёх городов?

Если число интересующих нас способов невелико, то ответ на подобный вопрос можно получить путём *перебора всех возможных вариантов*. А для этого прежде всего надо найти разумный способ такого перебора, который позволит не пропустить ни один из вариантов и не повторить ни один из них. Иными словами, важно выбрать *логику* перебора.

Задача 1. Сколько двузначных чисел можно составить, используя только цифры 1, 4 и 7?

Решение. Будем выписывать числа в порядке возрастания. Сначала запишем все числа, начинающиеся с цифры 1, затем начинающиеся с цифры 4 и, наконец, с цифры 7:

11, 14, 17,
41, 44, 47,
71, 74, 77.

Перебор показывает, что всего можно составить 9 чисел.

- Дополним условие рассмотренной задачи требованием: каждую цифру можно использовать только один раз. Какие числа в таком случае нужно отбросить? Сколько останется чисел?
- Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 3 и 6, если:
 - а) каждую цифру разрешается использовать только один раз;
 - б) каждую цифру разрешается использовать не один раз?

Задача 2. На прямой отметили четыре точки: A , B , C и D (рис. 2.16). Сколько получилось отрезков?



■ Рис. 2.16

Решение. Любые две отмеченные точки являются концами некоторого отрезка. Сначала рассмотрим все отрезки, одним из концов которых является точка A . Это отрезки AB , AC и AD .

Теперь рассмотрим все отрезки с одним из концов в точке B . Это отрезки BA , BC и BD . Но отрезок BA уже был назван: ведь BA и AB — это два разных «имени» одного и того же отрезка. Значит, новыми будут только отрезки BC и BD .

Рассуждая точно так же, мы получим, что из всех отрезков с концом в точке C новым будет только отрезок CD .

Все отрезки с концом в точке D уже указаны.

Итак, имеется шесть отрезков:

$$\begin{array}{l} AB, AC, AD, \\ BC, BD, \\ CD. \end{array}$$

- Изобразите в тетради прямую с точками A , B , C , D (см. рис. 2.16) и добавьте ещё точку E . Теперь на прямой отмечены пять точек. Сколько отрезков при этом добавилось?

- 138** Запишите все двузначные числа, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, используя при записи числа каждую цифру не более одного раза. Сколько получится чисел, если каждую цифру использовать не один раз?
- 139** Сколькими способами можно составить патруль из двух полицейских, если на дежурство вышли четверо: Быстров, Свистунов, Умнов и Дубов?
Подсказка. Обозначьте милиционеров первыми буквами их фамилий.
- 140** Из четырёх игр: шашки, лото, конструктор и эрудит — надо выбрать две. Сколькими способами можно осуществить этот выбор?
- 148** Сколько трёхзначных чисел можно составить, используя только цифры 4 и 5?
- 149** Сколько чисел в римской нумерации можно записать, используя только цифры I и V?
- 151** Запишите все числа, которые можно получить из числа 485203, если зачеркнуть в нём две цифры. Какое из них самое большое? Могли бы вы ответить на этот вопрос без перебора всех вариантов?
- 152** Сколько существует двузначных чисел, у которых первая цифра больше второй?

155 Назовите все цифры, которые можно подставить вместо звёздочки, чтобы получилось верное неравенство:

а) $7*38 > 7238$;

б) $96*4 < 9614$;

в) $1596 > 159*$.

157 Выполните действия:

а) $524 + 2588$;

в) $369 \cdot 205$;

д) $6675 : 5$;

б) $3000 - 1023$;

г) $680 \cdot 700$;

е) $10\ 800 : 40$.

435. Докажите, что:

а) $20 \cdot 30 < 23 \cdot 35 < 30 \cdot 40$;

б) $600 \cdot 800 < 645 \cdot 871 < 700 \cdot 900$;

в) $1200 < 36 \cdot 42 < 2000$;

г) $45\ 000 < 94 \cdot 563 < 60\ 000$.

Домашнее задание.

п.2.5, №137, №142, №156

Дерево возможных вариантов. Решение комбинаторных задач.

Чтобы осуществить перебор, часто приходится вводить условные обозначения. Например, если в задаче речь идёт о красных и зелёных шарах, то необязательно рисовать эти шары или записывать полностью названия их цветов. Можно ограничиться только первыми буквами — К и З. Такую замену предметов их условными обозначениями называют *кодированием*.

Задача. В мешке лежат 5 одинаковых по форме шаров: 3 красных (К), 2 зелёных (З). Сколько способов вынуть пару (КЗ) ?

Задача 3. В четверг в 1 классе должно быть 3 урока: русский язык, математика и физкультура. Сколько различных вариантов расписания на этот день можно составить?

Решение. Чтобы удобнее было записывать варианты расписания, введём обозначения: русский язык — Р, математика — М, физкультура — Ф.

Поставим на первый урок русский язык, тогда на втором уроке может быть или математика, или физкультура. Если на втором уроке дать математику, то на третьем может быть только физкультура; если же на втором уроке дать физкультуру, то на третьем окажется математика. Мы получили два варианта расписания: РМФ, РФМ.

Поставив на первое место математику и рассуждая точно так же, получим ещё два варианта: МРФ, МФР.

Поставив на первое место физкультуру, с помощью таких же рассуждений получим ещё два варианта: ФМР, ФРМ.

Таким образом, можно составить 6 вариантов расписания:

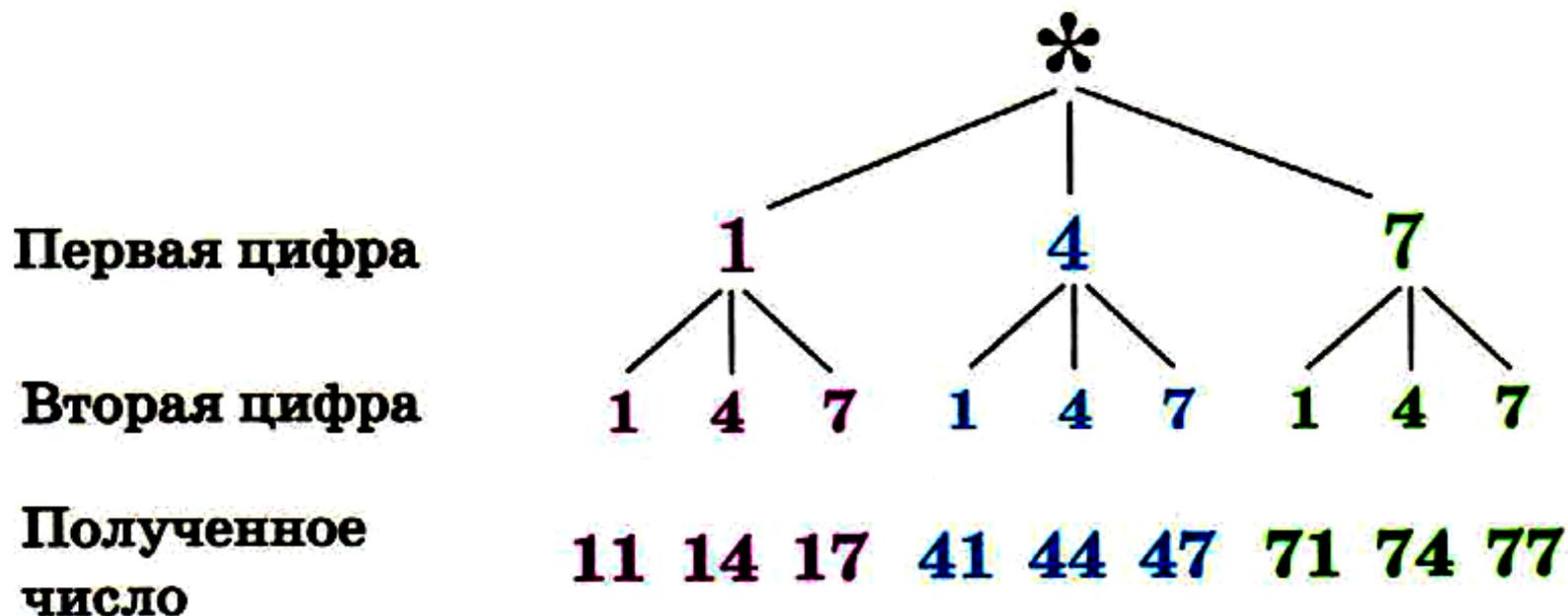
РМФ	РФМ
МРФ	МФР
ФМР	ФРМ



Часто процесс перебора удобно осуществлять путём построения специальной схемы — так называемого *дерева возможных вариантов*. Это название принято потому, что такая схема, как вы увидите, действительно напоминает дерево, но расположенное «вверх ногами» и без ствола. Корень дерева изображают знаком *.

Решим ещё раз задачу о составлении двузначных чисел из цифр 1, 4 и 7, но теперь с помощью построения дерева.

Можно рассуждать так. Чтобы составить какое-нибудь число, надо сначала выбрать его первую цифру. А для этого у нас есть три варианта: цифра 1, цифра 4 и цифра 7. Поэтому от корня дерева — знака * — проведём три ветви (три отрезка) и на их концах поставим цифры 1, 4 и 7 (рис. 2.17).



■ Рис. 2.17

Теперь надо выбрать вторую цифру. Для этого опять есть три варианта: цифры 1, 4 и 7. Поэтому от каждой первой цифры проведём по три отрезка, на концах которых снова запишем цифры 1, 4 и 7.

Двигаясь по ветвям дерева, мы получим все девять двузначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 4 и 7.

- Какие ветви дерева окажутся лишними, если каждую цифру можно использовать только один раз?
- Решите с помощью построения дерева задачу о расписании уроков.

- 141** Саша выбрал в библиотеке пять книг, но одновременно можно взять только две книги. Сколько вариантов выбора двух книг из пяти есть у Саши?
- 144** Сколько новых чисел можно получить из числа 546, переставляя его цифры?
- 154** В школьной лотерее должно быть всего десять различных выигрышей. Есть ручки, блокноты, записные книжки, альбомы для рисования. Можно ли из этих предметов составить десять различных выигрышей, по два разных предмета в каждом?
- 157** Выполните действия:
- | | | |
|--------------------|----------------------|---------------------|
| а) $524 + 2588$; | в) $369 \cdot 205$; | д) $6675 : 5$; |
| б) $3000 - 1023$; | г) $680 \cdot 700$; | е) $10\,800 : 40$. |

Домашнее задание.

п.2.5, №143, №145, №158

Подготовка к контрольной: №1-12 стр.48