Понятие множества.

20,30.03.2020

В 70-х гг. XIX в. Георг Кантор (1845–1918)

Словом «множество» в математическом языке обозначают любую совокупность объектов (или предметов), объединённых каким-либо общим признаком. Можно, например, говорить о множестве дней в году, множестве букв латинского алфавита, множестве всех стран на земном шаре, множестве планет Солнечной системы, множестве клеток человеческого тела. Для математики особенно важны множества, составленные из математических объектов — чисел, выражений, точек, фигур и т. д.

В слове «множество» каждый, конечно, слышит «много». Но что означает «много» или «мало», этого никто сказать точно не может. Ещё в Древней Греции был известен *парадокс кучи зерна*. (Слово «парадокс» греческого происхождения и означает «неожиданное противоречие».) Этот парадокс заключается в попытке ответить на вопрос: «Сколько зёрен составляют кучу?» Ясно, что 2, 4, 23 зерна — это ещё не куча, а миллион зёрен — это уже, конечно, куча. А где «не куча» переходит в «кучу» — неизвестно. И если бы мы пытались установить между ними точную границу, то попали бы в странное положение. Например, 37 зёрен мы кучей ещё не назовём, а 38 уже могут быть кучей? Математики решают этот вопрос тем, что попросту его не ставят: термин «множество» употребляется независимо от того, сколько объектов в него входит.

Обозначения множеств.

Множества обычно обозначают большими буквами латинского алфавита: A, B, C, M, P и т. д. А основные числовые множества — натуральных и целых чисел — всегда обозначают буквами $\mathbf{N}$ и $\mathbf{Z}$. Можно сказать, что эти буквы — «имена собственные» указанных множеств.

Всякий объект, входящий в множество, называют его *элементом*. Например, Санкт-Петербург — элемент множества городов европейской части России.

Для того чтобы на математическом языке записать предложение «x — элемент множества A» (или, что то же самое, «x принадлежит множеству A»), используют знак $\in$. Соответствующая запись выглядит так: $x \in A$. Легко догадаться, что запись «$x \notin A$» означает «x не является элементом множества A».

Пусть, например, P — множество простых чисел. Тогда предложения «число 13 — простое» и «число 15 не является простым» на символическом языке можно записать так: $13 \in P$ и $15 \notin P$.

Обозначения множеств:

N- натуральные числа;

Z- целые числа;

Q – рациональные числа (дробные вида m/n, где $m,n \in Z$)

R – действительные числа (любые десятичные дроби)

Конечные и бесконечные множества.

Если множество содержит конечное число элементов, то говорят, что это **конечное множество**. Так, множество жителей нашей планеты конечно (хотя число людей на Земле очень велико — порядка 6 млрд).

Иногда, чтобы задать конечное множество, можно просто *перечислить* все его элементы. При этом в записи используют фигурные скобки. Например, запись $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ означает, что C — множество первых пяти нечётных чисел. Элементы множества можно перечислять в любом порядке. К примеру, множество C можно записать так: $\{9; 7; 5; 3; 1\}$ или так: $\{1; 9; 3; 7; 5\}$. Всё это разные представления одного и того же множества.

Однако задавать множество перечислением его элементов удобно только в том случае, когда их число невелико. Ведь гораздо проще сказать, к примеру, что B — множество двузначных чисел, чем перечислять все двузначные числа от 10 до 99. К тому же в математике рассматривают и **бесконечные множества**. Поэтому чаще всего множества задают *описанием*, например: множество стран, принявших участие в Олимпийских играх в Пекине; множество растений, занесённых в Красную книгу; множество чисел, кратных 5.

Пустое множество $\varnothing$.

В то же время, описав словами некоторое множество, нельзя гарантировать, что найдётся хотя бы один объект, отвечающий этому описанию. Пусть A — множество чисел, которые делятся на 4, но не делятся на 2. Попробуйте назвать хотя бы одно такое число. У вас это не получилось? Это и не удивительно, ведь такие числа не существуют! Значит, мы описали множество, которое не содержит ни одного элемента. Такое множество называют **пустым множеством** и обозначают символом $\varnothing$.

Сравнение множеств

Возьмём множества $\{1, 3, 5\}$ и $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Каждый элемент первого множества принадлежит также и второму. В таком случае говорят, что первое множество является **подмножеством** второго.

Множество A называют подмножеством множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Пустое множество считают подмножеством любого другого множества.

Из этого определения, в частности, следует, что в число подмножеств данного множества включается и само это множество.

Если множество A является подмножеством множества B, то в символическом виде это записывают так: $A \subset B$.

Сравнение множеств

С подмножествами мы встречаемся всякий раз, когда некоторое множество рассматривается не самостоятельно, а как часть другого, более широкого множества. Например, множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел: $N \subset Z$. Факт включения множества N в множество Z проиллюстрирован на рисунке 10.1. Множество изображается в виде некоторого круга. Вы видите, что все точки круга N принадлежат также и кругу Z.

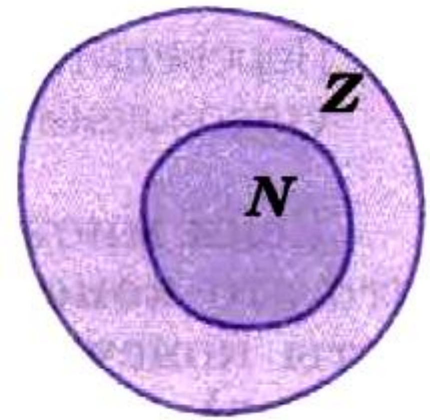
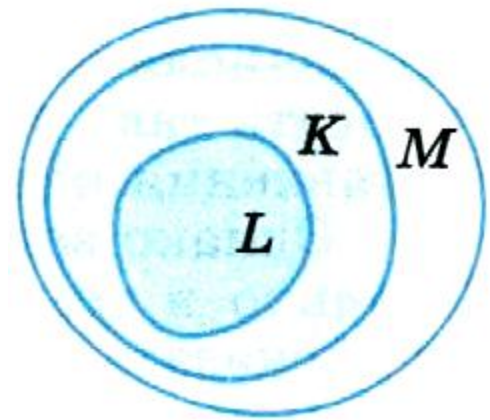


Рис. 10.1

А вот «нематематический» пример: леопарды входят в семейство кошачьих, а семейство кошачьих — в класс млекопитающих. Обозначим множество леопардов буквой L, множество кошачьих — буквой K и множество млекопитающих — буквой M. Тогда для этих множеств можно записать такую цепочку включений: $L \subset K \subset M$. Она проиллюстрирована на рисунке 10.2.



Устный счёт под запись

Пусть A – множество целых чисел, бо́льших -100 и меньших 150. Какие из чисел 0, -125, 135, -99, 100, -100 являются элементами этого множества, а какие – не являются? В каждом случае запишите ответ с помощью знака $\in$ или $\notin$.

Пусть B – множество обыкновенных дробей, которые можно представить в виде десятичных. Какие из чисел $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{3}{75}$, $\frac{10}{30}$ являются элементами этого множества, а какие не являются?

Сколько элементов содержит множество:

а) цифр десятичной системы счисления;

б) букв русского алфавита;

Анализируем и рассуждаем Конечным или бесконечным является множество:

а) натуральных чисел, кратных 10;

б) целых отрицательных чисел, бо́льших -25;

628 Прочитайте следующие утверждения и выпишите те из них, которые являются верными:

а) $13 \in N$, $13 \in Z$, $13 \in Q$;

б) $0 \in N$, $0 \in Z$, $0 \in Q$;

в) $-25 \in N$, $-25 \in Z$, $-25 \in Q$,

г) $\frac{5}{2} \in N$, $\frac{5}{2} \in Z$, $\frac{5}{2} \in Q$.

629 Запишите на символическом языке утверждение:

а) число 10 — целое;

б) число -10 не является натуральным;

в) число $\frac{10}{3}$ — не целое;

г) число 37 — натуральное.

630 Пусть C — множество обыкновенных дробей, которые можно представить в виде десятичных. Какие из чисел $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{3}{75}$, $\frac{10}{30}$ являются элементами этого множества, а какие не являются? Запишите ответы с помощью знаков $\in$ и $\notin$.

Домашнее задание.

П.10.1.№ 809-811

Понятие множества. Дополнение.

31.03.2020-
01.04.2020

Термин «Множество» в математике означает любой, пусть даже и пустой, набор объектов, объединённых единым признаком.

Примеры: множество сторон треугольника

ABC – это отрезки AB, BC и AC, взятые

вместе.

Множество четных цифр, это {0;2;4;6;8}.

Элемент множества.

Любое множество состоит из своих частей, хотя бы из одной части. Каждая часть множества – тоже множество, состоящее из частей. Самая мелкая часть множества, в решаемой задаче не делимая на части мельче самой себя, называется элементом этого множества.

Примеры: Элементы множества сторон треугольника АВС – это отрезки АВ, ВС и АС по отдельности. Элементы множества четных цифр, это 0, 2, 4, 6 и 8.

Классификация множеств.

Множества в зависимости от количества элементов бывают:

конечными (например, множество сторон треугольника, множество десятичных цифр),

бесконечными (например, множество всех треугольников, множество натуральных чисел),

пустыми, если они не содержат ни одного элемента.

Обозначение множества.

Множество обозначают большой буквой латинского алфавита. Буква – имя множества. Имя множества может быть локально, то есть определено только в конкретной решаемой задаче, или быть универсальным, глобальным для всех задач.

Примеры.

Локальное имя: T - множество сторон треугольника ABC.

Глобальное имя: N - Множество натуральных чисел.

Элемент множества, имеющего имя, обычно обозначается маленькой буквой с индексом.

Так, элементы множества A, это a_i .

Примеры множеств с глобальными именами:

1) натуральные числа - N. Элементы – n.
2) Множество целых чисел - Z. Элементы – k.
3) Множество рациональных чисел - Q. Это дробные числа вида $^{m}/_{n}$, где m,n из Z)
4) Множество иррациональных чисел - I. Это бесконечные непериодические десятичные дроби, например число π=3,1415….
5) Множество действительных чисел – R. Это любые десятичные дроби. Элементы – x_i.
6) Пустое множество - ∅. Это множество, не содержащее ни одного элемента. Чистая абстракция.
7) Множество комплексных чисел – C.

Равные множества.

Равные множества содержат одни и те же элементы.

Если A=B, то у каждого a_i есть равный ему b_j и наоборот, у каждого b_j есть равный ему a_i.

Равные множества совпадают!

По сути, равные множества, это одно и то же множество, только названное разными именами.

Способы задания множеств.

1) Через словесное описание множества, т.е. общий признак всех элементов множества, записанный русским языком.
2) Через перечисление элементов множества.
3) Через глобальное имя.
4) Через формальное перечисление элементов множества, т.е. через общий признак всех элементов множества, записанный математическими символами.
5) Через формальное, формульное задание множества без перечисления элементов (действиями над множествами).

Примеры задания множеств.

1) Через словесное описание множества – T_{ABC} - множество сторон треугольника ABC.
2) Через перечисление элементов – A={0;2;4;6;8}. Только для конечных множеств.
3) Через глобальное имя – $A=R$ (A-Множество действительных чисел).
4) Через формальное перечисление элементов множества – $N=\{1;2;3;\ldots\}$ (множество натуральных чисел) ;
   $K=\{k_i=2i+1;\ i\in Z\}$ (множество нечётных целых чисел).
5) Через формульное задание множества $A=B\cup D$

Круги Эйлера.

Рисунки, отражающие отношения между множествами, элементами множеств, называют кругами Эйлера. Элементы множеств на кругах Эйлера – точки, сами множества – геометрические фигуры, обычно круги. Рис.см.учебник и видеоурок.

Диаграммы Эйлера-Венна.

Рисунки, отражающие отношения между множеством всех элементов конкретной задачи и его частями, элементами, называют диаграммами Эйлера-Венна. Рис.см. видеоурок.

Соотношения между множеством и элементом.

Множество всегда или включает в себя некоторый элемент, или нет.
Если множество A включает в себя некоторый элемент a, говорят, что a принадлежит A , и пишут $a \in \mathrm{A}$. Если a не принадлежит множеству A, пишут $a \notin \mathrm{A}$.

Соотношения между множествами.

2 множества всегда или равны, или не равны.

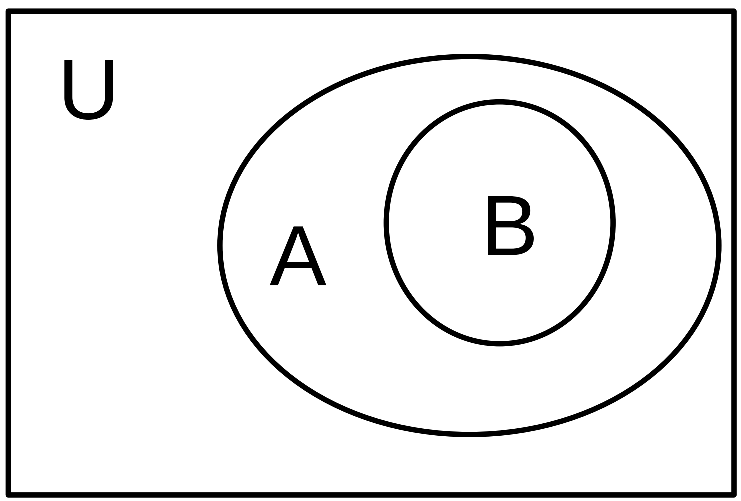
Равенство множеств разобрано раньше.

2 неравных множества или перекрываются, т.е. имеют общие элементы, или нет, т.е. общих элементов не имеют.

2 неравных перекрывающихся множества или перекрываются частично, т.е. оба имеют не только общие элементы, или одно множество (множество B) целиком входит в другое (множество A) , т.е. все элементы B принадлежат A.

Соотношения между множествами.

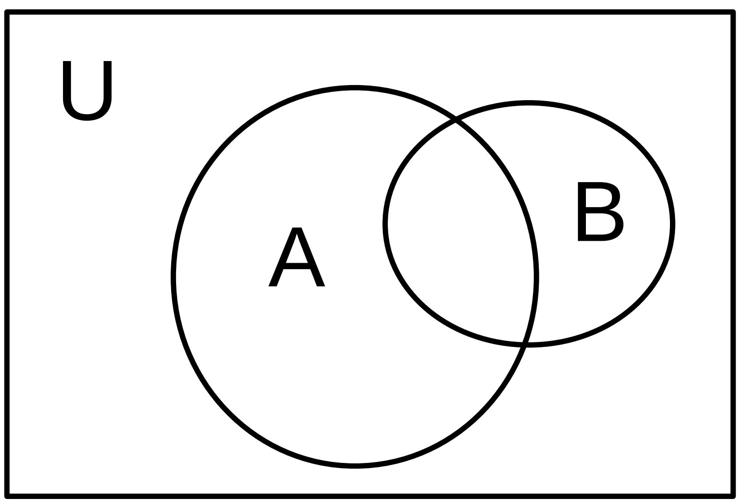
Если все элементы B принадлежат A, то B – подмножество A (тогда пишут $B \subset A$), а A – надмножество B (тогда пишут $A \supset B$).

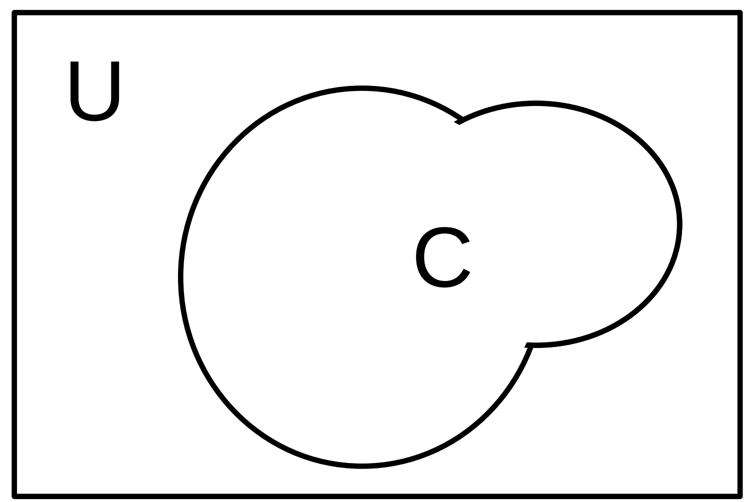


Если $B \subset A$, и $A \subset B$, то A=B.

Действия над множествами.

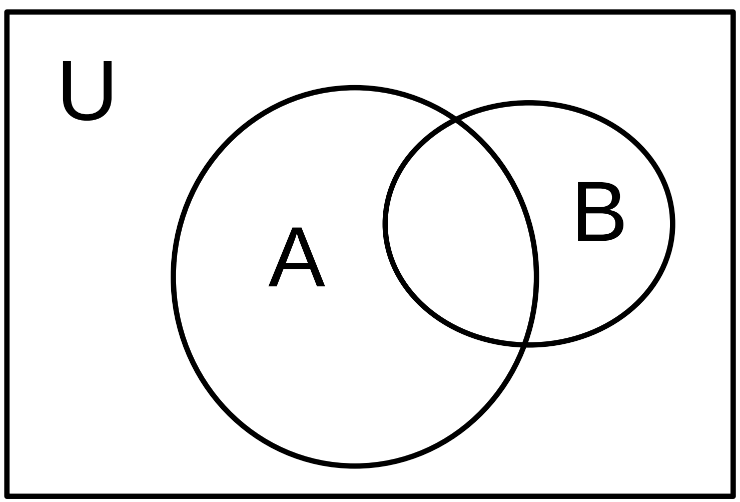
Если все элементы множества C принадлежат множеству A, или множеству B и в A и B нет элементов, не принадлежащих C, то множество C , это объединение A и B. Тогда пишут $C=A\cup B$.

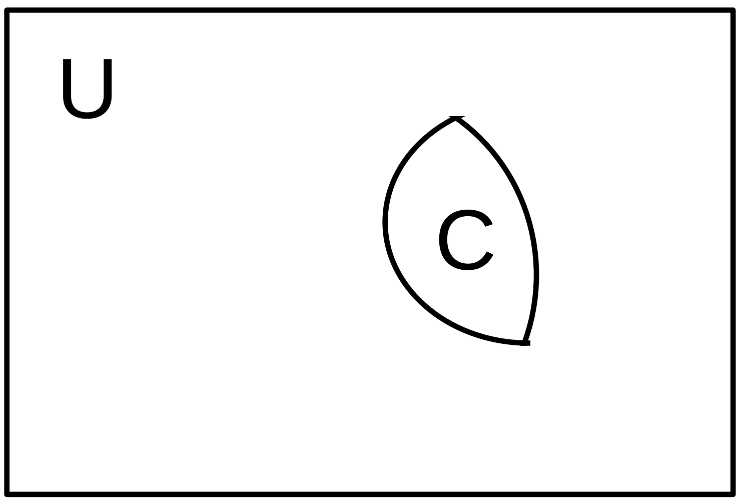




Действия над множествами.

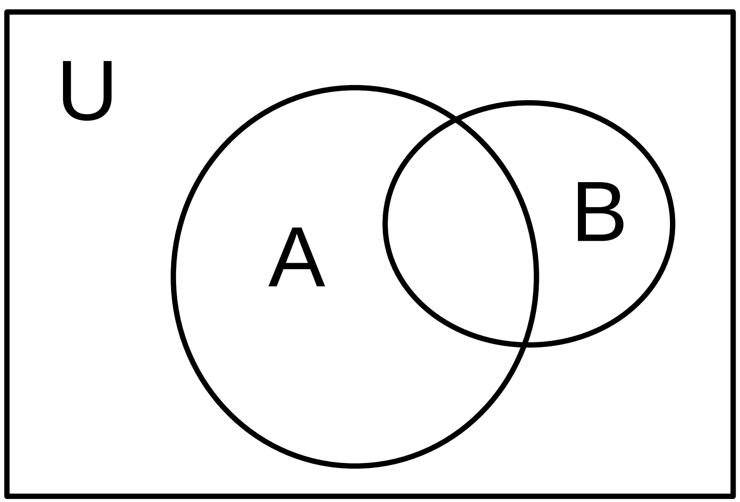
Если все элементы множества C принадлежат и множеству A, и множеству B, то множество C , это перекрытие, или пересечение A и B. Тогда пишут $C=A\cap B$.

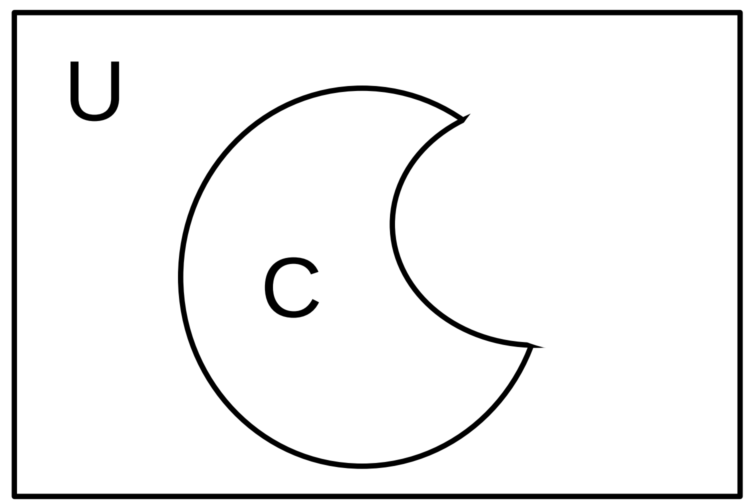




Действия со множествами.

Если все элементы множества C принадлежат множеству A, но не множеству B, то множество C , это A без B. Тогда пишут $C=A\setminus B$.



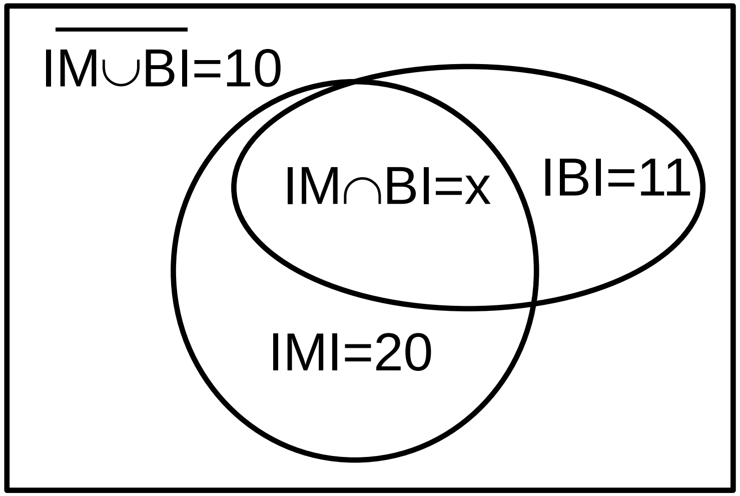


Решение задач с помощью кругов Эйлера.

02,03.04.2020

Задача 1. В классе 35 учеников. Из них 20 человек занимаются в математическом кружке, 11— в биологическом, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекаются математикой?

IUI=35



x=10+20+11-35=6

Подробности решения см. видеоурок.

Решение задач с помощью кругов Эйлера.

Задача 2. В классе 43 человека. Из них 16 играют в баскетбол, 17 - в хоккей, 18 - в футбол. Увлекаются двумя видами спорта - баскетболом и хоккеем - четверо, баскетболом и футболом - трое, футболом и хоккеем - пятеро. Трое не увлекаются ни баскетболом, ни хоккеем, ни футболом. Сколько ребят увлекаются одновременно тремя видами спорта? Сколько - лишь одним из этих видов спорта?

Решение. см. видеоурок.